我是8位的
I am 8 bits, what about you?
随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航
博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

| 日 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 28 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

公告
你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索
找找看
谷歌搜索
常用链接
我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签
积分与排名
积分 - 457097
排名 - 1198

# 线性代数笔记11——向量空间

向量空间又称线性空间，是线性代数的中心内容和基本概念之一。在解析几何里引入向量概念后，使许多问题的处理变得更为简洁和清晰，在此基础上的进一步抽象化，形成了与域相联系的向量空间概念。

## 线性组合

线性组合（liner combinations）这个概念曾经被多次提到，如果$v_1,v_2...v_n$是n维向量，即$v_i \in R^n$，那么$t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_nv_n$就是$v_1,v_2...v_n$的线性组合，$t_i \in R$。从定义可以看出，线性组合仅包括乘法和加法，只有同阶向量才涉及到线性组合。

如果有两个二维向量：

$$a = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

下面是可能存在的线性组合：

$$a+b = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}, \quad 2a+3b = \begin{bmatrix}11\\16\end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}a-b = \begin{bmatrix}-5/2\\-3\end{bmatrix},$$
$$0a-0b = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

最后一个组合最终得到零向量，零向量也是一个线性组合。此外，按照惯例，单个向量用列向量表示。

单个向量同样存在线性组合。下面是a可能存在的线性组合：

$$2a = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \quad a+2a = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}, \quad a+0a = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad 0a-0a = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

## 向量空间

概念没什么好解释的，经常提到二维空间$R^2$，三维空间$R^3$，n维空间$R^n$，这些就是向量空间。

以$R^2$空间为例，如果有两个指向不同方向的非零向量a和b，那么$R^2$空间的所有向量都可以用a和b的线性组合得出；a和b的所有线性组合都在$R^2$空间内。这也意味着，向量空间对向量的所有线性组合封闭。下面是一个不封闭的例子，如果定义$R^2$的第一象限是向量a(1,1)的向量空间，那么a的所有线性组合应该全部在第一象限内，但是 –a却落在了其它象限，所以第一象限不对a封闭，也不是a的向量空间。

## 向量张成的空间

如果几个向量的线性组合在某一个向量空间中，并且该向量空间仅包括这几个向量的线性组合，那么这个向量空间就叫做这几个向量张成的空间。

**随笔分类** (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

**随笔档案** (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

**阅读排行榜**

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

**评论排行榜**

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

**推荐排行榜**

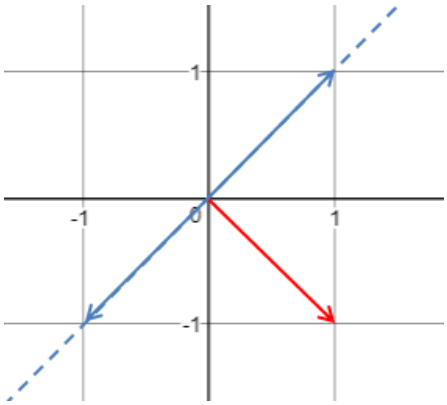
1. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

**最新评论**

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

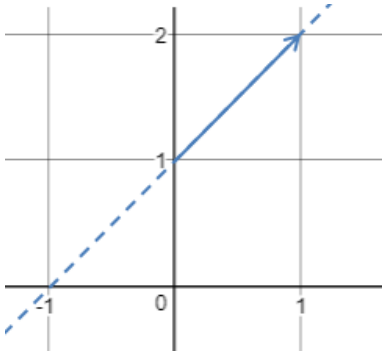
简单地说，N个向量张成的空间就是N个向量的线性组合。

以$R^2$空间为例，如果有两个指向不同方向的非零向量a和b，那么a,b张成的空间就是$R^2$，用span(a, b) = $R^2$ 表示。如果是两个平行的向量，a’ = <1, 1>，b’ = <-1, -1>，那么它们无法张成$R^2$，因为无论怎样线性组合，也不可能得到<1, -1>，实际上，a’ b’ 张成的空间是一条直线：




同样，span(a)张成的空间也仅仅是a的伸缩，所以span(a)也是一条直线。很明显，0向量张成的向量空间还是0向量。

需要注意的是，a是经过原点的，如果很不幸地将a画在了别的地方，它张成的空间就不是直线了，因为其中一个线性组合0a并不在直线上：




# 线性相关和线性无关

如果有两个向量<2,3>和<4, 6>，它们张成的空间是什么呢?

$$span\left\{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}\right\}=?$$

根据定义，这两个向量的线性组合是：

$$t_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}=t_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+2t_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=(t_1+2t_2)\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

这相当于单个向量<2, 3>的线性组合，是一条直线。实际上，这正是过原点的直线参数方程（直线的参数方程可参考《线性代数笔记6——直线和曲线的参数方程》）。

上面的两个向量就是线性相关的，这意味着它们中的一个可以用另一个的线性组合表示，也就是说其中一个向量是多余的，或者说它们不是独立向量（对同一种现象，线性代数从不同的角度会有多种叫法，这多少令人迷惑）。与之相反，就是线性无关。

再来一组向量，看看它们是线性相关还是线性无关?

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU

$$v_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

看起来是线性无关的，其中一个向量无论再怎么增大，都无法表示另一个，但是线性组合不仅仅包括数乘：

$$\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} = \begin{bmatrix}2\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{1}{2}\\ 3\times\frac{1}{2} + 5\times\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = v_3$$

$v_3$是$v_1v_2$的线性组合，所以这三个向量是线性相关的。换个角度看，$v_1v_2$是线性无关的，span($v_1$, $v_2$) = $R^2$，$R^2$中的每个向量都可以由$v_1$, $v_2$的线性组合表示，而$v_3 \in R^2$，所以$v_3$也可以由$v_1$, $v_2$的线性组合表示，它是个多余向量（当然，也可以说$v_1$或$v_2$是多余的，因为三者中的任意一个都可以由另外两个表示，所以三者等价），对张成空间没有任何贡献，因此$v_1v_2$ $v_3$是线性相关的。span($v_1$, $v_2$, , $v_2$) = $R^2$

有了上面的铺垫，可以用数学语言描述线性相关的定理：如果存在一个集合S = {$v_1$, $v_2$,...,$v_n$}，当这个集合满足$t_1v_1 + t_2v + \ldots + t_nv_n = \mathbf{Z}$ 时，S中的向量是线性相关的，其中**Z**是0向量，$t_i \in R$，$t_i$ 不全为0。

这似乎有些让人困惑，如果换一种写法就很清晰了。假设$t_1 \neq 0$:

$$t_2v_2 + t_3v_3 + \cdots + t_nv_n = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix} - t_1v_1 = -t_1v_1$$

$$v_1 = \left(-\frac{t_2}{t_1}\right)v_2 + \left(-\frac{t_3}{t_1}\right)v_3 + \cdots + \left(-\frac{t_3}{t_1}\right)v_n$$

$$= a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n$$

现在可以看出，定理描述的是，$v_1$可以用其它向量的线性组合表示。在判断线性相关的时候，定理提供了一种有效的方案。

现在有两个向量：

$$\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\}$$

或许很容易看出它们是线性无关的，现在根据上面数学描述看一种新方案：

$$t_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2t_1 + 3t_2 = 0\\ t_1 + 2t_2 = 0\end{cases}$$

现在判断线性相关变成了解方程组的问题，因为这个方程组解得$t_1 = 0$, $t_2 = 0$，所以两个向量是线性无关的，$t_1t_2$至少有一个不为0才是线性相关。

# 子空间

设V是 $R^n$的一个非空子集，若V中的任意N个向量的线性组合依然属于V，则称V是 $R^n$的一个线性子空间，简称子空间。

根据概念，如果V是$R^n$的线性子空间，则V一定满足三个条件，

1. 包含0向量；
2. x是V中的一个向量，x和一个标量的乘积也在V中，即数乘封闭性；
3. a和b是V中的向量，a+b也在V中，即加法封闭性。

上面的2、3可以看作是V中任意两个向量的线性组合。

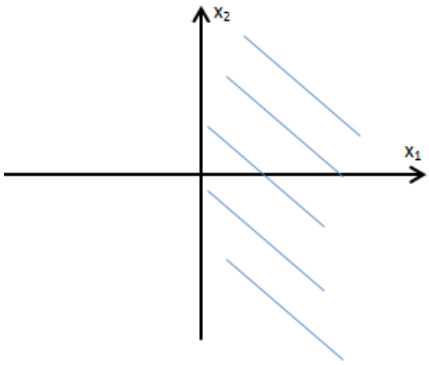
对于$R^2$来说，它的子空间有三个， $R^2$本身、Z、所有经过原点的直线。

对于$R^3$来说，它的子空间有四个， $R^3$本身、Z、所有经过原点的直线、所有经过原点的平面。

来看一个例子，下面的V是否是$R^2$的子空间?

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \middle| x_1 \geq 0 \right\}$$

可以通过分量的取值范围得知，V是直角坐标系的一、四象限：




可以根据子空间的条件逐一检验，首先0向量在V内；再看加法封闭性，这样定义V中的任意两个向量：

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\} \in V, \qquad a_1, a_2 \geq 0$$
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

由于$a_1+a_2 \geq 0$，所以满足加法封闭性。最后看乘法封闭性，当标量为负数时，其结果已经超出了一、四象限，不在V中，所以不满足乘法封闭性，V不是$R^2$的子空间。

最后，向量集合张成的空间一定是子空间，所以也经常说“向量张成的子空间”。

# 子空间的基

简单地说，基就是张成子空间所需要的最小向量集。

如果一个向量集$S=\{v_1, v_2 \dots v_n\}$中的向量是线性无关的，S张成了一个子空间V，S就叫做V的一组基，$\{v_1, 2v_2, 3v_3 \dots nv_n\}$ 是另一组基，但是它和第一组没什么本质区别。

下面的集合$S_1$和$S_2$都是$R^2$的一组基：

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

因为$S_2$中的两个向量是$R^2$空间两个维度上的单位向量，所以$S_2$也叫做$R^2$的标准基。

作者：我是8位的

出处：http://www.cnblogs.com/bigmonkey

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”

随笔

分类: 线性代数

标签: 线性组合, 向量空间, 子空间, 线性无关, 子空间的基

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

2 推荐 0 反对

« 上一篇： 线性代数笔记10——矩阵的LU分解
» 下一篇： 线性代数笔记12——列空间和零空间

posted on 2018-08-31 17:28 我是8位的 阅读(9371) 评论(1) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告
yozodcs.com
永中DCS_文档在线预览解决方案
兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署
打开

**编辑推荐：**
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
· ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
· .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
· 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

**最新新闻**：
· 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
· 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
· 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
· Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
· 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
» 更多新闻...

Powered by:
博客园
Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes